向量空间 $L$，运算：$L\times L \to L$.

$(x,y)\to \underbrace{[x,y]}_{\text{李括号}}$ bracket commutator.

满足三条公理：

L1：双线性.

L2：$\forall x\in L$，$[x,x]=0$.

L3：(Jacobi Identity)

$$[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0.$$

则称为一个李代数.

由 L1，L2 可推出反对称性：

$$[x+y,x+y]=[x,x]+[x,y]+[y,x]+[y,y]=0.$$

$$[x,y]=-[y,x].$$

同构：如有矢量空间的同构映射：$\phi: L\to L'$.

满足 $\phi([x,y])=[\phi(x),\phi(y)]$ $(\forall x,y\in L)$.

子代数：$K$ 为 $L$ 子空间，$\forall x,y\in K$，$[x,y]\in K$.

则称 $K$ 为 $L$ 的子代数.

(单独只看 $K$，则 $K$ 自己，配上 $L$ 那个运算构成李代数)

若 $V$ 为有限维，$\mathrm{End}\ V$ 表示 $V\to V$ 的线性变换.

则 $\dim \mathrm{End}\ V = n^2$. $(n=\dim V)$.

在复合的运算下成为一个环.

此时定义 $[x,y]=xy-yx$，则 $\mathrm{End}\ V$ 变成一个李代数.

L1, L2 显然满足

L3: $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]$

$$= x[y,z]-[y,z]x + y[z,x]-[z,x]y + z[x,y]-[x,y]z.$$

$$= x(yz-zy)-(yz-zy)x+y(zx-xz)-(zx-xz)y + z(xy-yx)-(xy-yx)z.$$

$$= \cancel{xyz} - \cancel{xzy} - \cancel{yzx} + \cancel{zyx} + \cancel{yzx} - \cancel{yxz} - \cancel{zxy} + \cancel{xzy} + \cancel{zxy} - \cancel{zyx} - \cancel{xyz} + \cancel{yxz}.$$

$= 0$.

将 End V 视为李代数时，则写作 $gl(V)$，称为 general linear algebra.

$gl(V)$ 的任一个子代数，称为线性李代数

Classical Algebra:

$A_l$: 令 $\dim V = l+1$.

$sl(V)$ 或 $sl(l+1, F)$ 表示迹0的自同态.

这确实是某一个子代数:

因为 $\forall x, y$, Tr是线性运算.

且 $Tr(x)=0$, $Tr(y)=0$, 则 $Tr([x,y]) = Tr(xy) - Tr(yx) = 0$.

构成子代数.

$sl$：special linear algebra.

其维数：首先其为 $gl(V)$ 的真子空间，则 $\leq (l+1)^2-1$

再考虑矩阵：$e_{ij}$ $(i\neq j)$. 有 $(l+1)^2-(l+1)$ 个.

与 $h_i = e_{ii} - e_{i+1,i+1}$ 有 $l$ 个

共 $(l+1)^2-(l+1)+l$ 个.

我们将其视为一组标准基.

$C_l$：$\dim V = 2l$，一组基为 $(v_1, \cdots v_{2l})$.

非退化的反对称双线性 $f$ 矩阵为 $\begin{bmatrix} & I_l \\ -I_l & \end{bmatrix}$

所有满足 $f(x(v), w) = -f(v, x(w))$ 的自同态

记作 $sp(V)$ / $sp(2l, \mathbb{F})$，sympletic algebra.

$$(xv)^T \cdot \begin{bmatrix} & I \\ -I & \end{bmatrix} w = -v^T \begin{bmatrix} & I \\ -I & \end{bmatrix} xw.$$

$$v^T x^T \cdot \begin{bmatrix} & I \\ -I & \end{bmatrix} w = -v^T \begin{bmatrix} & I \\ -I & \end{bmatrix} xw.$$

$$x^T \begin{bmatrix} & I \\ -I & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & I \\ -I & \end{bmatrix} x$$

设 $x = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$ $m, n, p, q \in gl(l, \mathbb{F})$.

$$\begin{bmatrix} m^T & p^T \\ n^T & q^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & I \\ -I & \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} & I \\ -I & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -p^T & m^T \\ -q^T & n^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p & -q \\ m & n \end{bmatrix}$$

则 $p^T = p \quad -q = m^T \quad n^T = n$

由于 $m^T = -q$，知 $Tr(X) = 0$.

sp$(2l, \mathbb{F})$的基：

先仅考虑 $m \to q$. →在 $m$ 中 →在 $q$ 中.

对角线上 $e_{ii} - e_{l+i, l+i}$ 显然为一组. 共 $l$ 个.

对角线外：$m^T = -q$，取 $e_{ij} - e_{l+j, l+i}$ $l^2 - l$ 个.

对于 $n, p$，由 $n^T = n$，$p^T = p$ 知，

$n$ 有 $e_{i, l+i}$，$e_{i, l+j} + e_{j, l+i}$ 基.

共 $l + \frac{l(l-1)}{2}$ 个. $p$ 同理.

$$\dim sl(V) = 2\left(l + \frac{l(l-1)}{2}\right) + l + l^2 - l.$$

$$= 2l + l^2 - l + l^2$$

$$= 2l^2 + l.$$

$B_l$: 令 $\dim V = 2l+1$，$f$ 为非退化的对称双线性

且矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & I_l \\ & I_l & \end{bmatrix}$

正交代数 (orthogonal algebra)

$o(V)$ / $o(2l+1, \mathbb{F})$ 定义为：所有满足

$f(x(v),w) = -f(v,x(w))$ 的自同态 $x$.

$$X = \begin{bmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & m & n \\ c_2 & p & q \end{bmatrix} \quad 则 \quad SX = -X^T S.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & I \\ & I & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_1 & m & n \\ c_2 & p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b_1 & b_2 \\ c_2 & p & q \\ c_1 & m & n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & c_1^T & c_2^T \\ b_1^T & m^T & p^T \\ b_2^T & n^T & q^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 0 & I \\ & I & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c_2^T & c_1^T \\ b_1^T & p^T & m^T \\ b_2^T & q^T & n^T \end{bmatrix}$$

知 $a = -a$, $a=0$ $\quad c_2^T = -b_1 \quad c_1^T = -b_2$.

$-p = p^T \quad -m = q^T \quad -n = n^T$

知 $Tr(x) = 0$. $b_1, b_2$ 处, 有 $2l$ 个基.

对于 $-q = m^T$, 由 $C_l$ 知有 $l^2$ 个.

$p^T = -p$ : 有 $\frac{l(l-1)}{2}$ 个 $\quad -n = n^T$ 同理.

$$共: \quad 2\cdot\frac{l(l-1)}{2} + l^2 + 2l$$

$$= l^2 - l + l^2 + 2l = 2l^2 + l \text{ 个}.$$

$D_l$ : 正交代数 (orthogonal algebra)

与 $B_l$ 类似, 但 $\dim V = 2l$, $S = \begin{bmatrix} & I \\ I & \end{bmatrix}$

$x = \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} \quad Sx = -x^T\cdot S$

$$\begin{bmatrix} & I \\ I & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m^T & p^T \\ n^T & q^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & I \\ I & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p^T & m^T \\ q^T & n^T \end{bmatrix}$$

则 $q^T = -m \quad p = -p^T \quad n = -n^T$.

知 $Tr(X) = 0 \quad q^T = -m$: $l^2$ 个基.

$p = -p^T$: $\frac{l(l-1)}{2}$ 个 $\quad n = -n^T$ 同理.

共 $2l^2 - l$ 个.

$gl(n, \mathbb{F})$ 中，其余重要的子代数:

①: $t(n, \mathbb{F})$ 所有的上三角阵.

②: $n(n, \mathbb{F})$ 严格上三角阵(对角线亦为 0.

③: $d(n, \mathbb{F})$ 对角阵.

易知 $t = n \oplus d$.

$[d, n] = \underbrace{dn}_{n} - \underline{nd} = n$.

$M_1, M_2 \in t$, 则 $[M_1, M_2] \in n$.

李代数的导子.

域 $\mathbb{F}$ 上的向量空间 $U$, 配一个双线性运算: $U \times U \to U$

写作: $a \times b \to ab$.

$U$ 的导子: 线性映射 $\delta: U \to U$.

满足运算法则: $\delta(ab) = a\delta(b) + \delta(a)b$.

Der U: U的所有导子是 End U的一个子空间.

$$(\delta_1+\delta_2)(ab) = a(\delta_1+\delta_2)b + (\delta_1+\delta_2)a\cdot b$$
$$= a(\delta_1 b+\delta_2 b) + (\delta_1 a+\delta_2 a)b$$
$$= \delta_1(ab)+\delta_2(ab).$$

$$[\delta_1,\delta_2] = \delta_1\delta_2-\delta_2\delta_1$$
$$(\delta_1\delta_2-\delta_2\delta_1)(ab) = \delta_1\delta_2 ab - \delta_2\delta_1 ab$$
$$= \delta_1(a\delta_2 b+\delta_2 a\cdot b) - \delta_2(a\delta_1 b+\delta_1 a\cdot b)$$
$$= a\cdot(\delta_1\delta_2 b)+(\delta_1 a)(\delta_2 b)+(\delta_2 a)(\delta_1 b)+(\delta_1\delta_2 a)b$$
$$-a(\delta_2\delta_1 b)-(\delta_2 a)(\delta_1 b)-(\delta_1 a)(\delta_2 b)-(\delta_2\delta_1 a)b$$
$$= a(\delta_1\delta_2-\delta_2\delta_1)b+(\delta_1\delta_2-\delta_2\delta_1)a\cdot b$$

故 $[\delta_1,\delta_2]$ 仍为一个导子.

伴随: 固定 $x\in L$, 则 $y\to[xy]$ 是L的一个自同态

将其记作 ad $x$.

$ad x\in Der\ L$, 因为:

$$[x[yz]] = -[y[zx]]-[z[xy]]$$
$$= [[xy]z]+[y,[xz]]$$

$$ad_x[yz] = [ad_x(y)\cdot z]+[y\cdot ad_x(z)]$$

此处考虑李代数，其乘法就是李括号，则括号可去

i.e. $ad_x[yz] = ad_x(y)\cdot z + y\cdot ad_x(z)$.

则 $ad_x$ 是一种导子，将其称为内导子。
其余的都叫外导子。

$L \to \mathrm{Der}\, L$
$x \to ad\, x$ 称为 L 的伴随表示。

$ad_L x$ : x 作为 L 中的元素。

e.g. 若 x 为对角阵，则 $ad_{d(n,\mathbb{F})}(x) = 0$.
但 $ad_{gl(n,\mathbb{F})}\, x$ 不恒为 0.

抽象李代数:

若 L 为一个李代数，基为 $\{x_1, x_2, \cdots x_n\}$.
则乘法表可由结构常数确定，就是说:

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{a_{ij}^{k}}_{\text{这就是结构常数}} x_k.$$

由反对称性: $[x_j, x_i] = \sum_{k=1}^{n} a_{ji}^{k} x_k = -[x_i, x_j]$

故 $a_{ji}^{k} + a_{ij}^{k} = 0$. $i = j$ : $a_{ii}^{k} = 0$.

现在用 jacobi identity 算下试试

$$[x_i, [x_j, x_k]] = [x_i, \sum_{l=1}^{n} a_{jk}^{l} x_l]$$

$$= \sum_{l=1}^{n} a_{jk}^{l} [x_i, x_l]$$

$$= \sum_{l=1}^{n} a_{jk}^{l} \sum_{m=1}^{n} a_{il}^{m} x_m = \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} a_{jk}^{l} a_{il}^{m} x_m$$

对下标轮换对称:

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\left(a_{jk}^{l}a_{il}^{m}+a_{ki}^{l}a_{jl}^{m}+a_{ij}^{l}a_{kl}^{m}\right)x_m=0,$$

则 $\forall\ 1\le m\le n$，有:

$$\sum_{l}\left(a_{jk}^{l}a_{il}^{m}+a_{ki}^{l}a_{jl}^{m}+a_{ij}^{l}a_{kl}^{m}\right)=0.$$

一般很少直接用结构常数去构造李代数.