理想 (ideal)

李代数 L 的子空间 I，若满足以下性质：

$\forall x \in L$，若 $y \in I$，则有 $[x, y] \in I$

(由于 $[x\ y] = -[y\ x]$，所以 x y 的位置，哪一个是 L，哪一个是 I 中的并不重要).

0 与 L 是显然的理想，我们说它是平凡的.

另一个例子：中心 $Z(L) = \{z \in L : [xz] = 0, \forall x \in L\}$

验证一下：$[x, 0] = 0$. $0 \in Z(L)$

$y \in Z(L)$, $[x\ y] = 0$. $0 \in Z(L)$.

若 L 是 abel 群，iff：$Z(L) = L$. $(xy = yx)$

导代数：包含了所有 $[x\ y]$ $(\forall x, y \in L)$ 的线性组合.

它当然是一个理想.

I 与 J 为两个理想，则 $I + J = \{x + y : x \in I, y \in J\}$

亦为理想：$[z, x+y] = [z, x] + [z, y] \in I + J$

$[I J] = \{\sum x_i y_i : x_i \in I, y_i \in J\}$

亦为理想：$a \in [I, J]$

涉及抽代概念，跳过.

从理想入手来研究李代数：

单 (simple)：L 除了自己，0，无理想，且：$[L, L] \neq 0$.

即，$Z(L) = 0$. $[L, L] = L$.

e.g. $L=sl(2,\mathbb{F})$ 有基：$x=\begin{bmatrix} & 1\\ & \end{bmatrix}$ $\quad y=\begin{bmatrix} & \\ 1 & \end{bmatrix}$

$h=\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}$

$[x\ \ y]=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}}_{h}$ $\quad [h\ \ x]=\underbrace{\begin{bmatrix} & 2\\ & \end{bmatrix}}_{2x}$ $\quad [h\ \ y]=\underbrace{\begin{bmatrix} & \\ -2 & \end{bmatrix}}_{-2y}$

这就是乘法表.

假设 I 为 L 一个理想, $I\neq 0$, $I\neq L$.

$\forall\ \alpha\in L$, $\alpha=ax+by+ch$.

$[x,[x,ax+by+ch]]=-2bx\in I$

$[y,[y,ax+by+ch]]=-2ay\in I$.

若, a, $b\neq 0$, 则 $y,x\in I$, $[x,y]=h\in I$.

$I=L$, 矛盾!

如 $a=b=0$, 则 $h\in I$. $[x,h]=-2x\in I$

$[y,h]=2y\in I$

$I=L$, 矛盾!

故 $sl(2,\mathbb{F})$ 单.

若 L 不单, 则可分解出一个合适的理想 I, 从而得到一个低维的李代数.

商代数：L/I (I 为理想).

乘法：$[x+I,\ y+I]=[x,y]+I$.

因为：$x'=x+\underset{\in I}{u}$ $\quad y'=y+\underset{\in I}{v}$

$$[x+u, y+v] = [x,y] + \underbrace{[u,y] + [x,v] + [u,v]}_{I\text{中}}.$$

正规化子：子代数 $K \subset L$ 的正规化子：

$$\underbrace{N}_{\text{normalizer}}{}_L(K) = \{x \in L : [x\,K] \in K\}$$

$N_L(K)$是一个子代数：$\forall x, y \in N_L(K)$, $z \in K$.

$[x,z] \in K$, $[y,z] \in K$.

$$[[x,y],z] = -[[y,z],x] - [[z,x],y] \in K.$$

若 $K = N_L(K)$，则称其为自正规子(self-normalizer).

中心化子：L子集X的中心化子：

$$C_L(X) = \{x \in L : [x, X] = 0\}$$

这仍为一个子代数.

$\forall x, y \in C_L(X)$, $z \in X$.

$$[[x,y],z] = -\underbrace{[[y,z],x]}_{0} - \underbrace{[[z,x],y]}_{0} = 0.$$

同态与表示.

线性变换：$\phi : L \to L'$ (当然李代数了)

若 $\phi([x\,y]) = [\phi(x), \phi(y)]$ 则称为同态

单射：$\ker\phi = 0$.　　同构：又单又满.

满射：$\mathrm{Im}\,\phi = L'$

$\ker\phi$ 是 L 的理想

(Ker φ 是 L 的理想: $\varphi(x)=0$, $y\in L$, $\varphi([x,y])=[\varphi(x),\varphi(y)]$
$=0.$

Im φ 为 L' 子代数.

典范映射: $x \to x+I$

推论:

(a): $\varphi: L \to L'$ 是李代数的同构, 则:

$$L/\mathrm{Ker}\,\varphi \cong \mathrm{Im}\,\varphi.$$

I 为 L 中理想, $I \subset \mathrm{Ker}\,\varphi$, 则存在唯一同态:

$\psi: L/I \to L$ 使得下图交换 (π 为典范映射).

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & L' \\ & L/I \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

同态定理

定理（同态基本定理）：映射 f: $R \longrightarrow R'$ 是一个环同态，则存在唯一单同态 $\overline{f}: R/ker(f) \longrightarrow R'$,使得: $f = \overline{f}\cdot\varphi$,其中: $\varphi: R \longrightarrow R/ker(f)$ 是商同态.

证明:

令 $I = ker(f), \overline{f}(a+I) = f(a), \forall a+I \in R/I$,可以验证 $\overline{f}$ 确实是映射:
$a+I = b+I \Rightarrow a-b \in I \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow \overline{f}(a+I) = \overline{f}(b+I)$

另一方面: $\overline{f}(a+I) = \overline{f}(b+I) \Rightarrow f(a) = f(b) \Rightarrow a-b \in I \Rightarrow a+I = b+I$,所以 $\overline{f}$ 是单射，另外，可以验证它是同态，且 $f = \overline{f}\cdot\varphi$.

唯一性：若还有单同态 g: $R/I \longrightarrow R'$ 满足 $f = g\cdot\varphi$,则
$\forall a+I \in R/I$. $g(a+I) = g\cdot\varphi(a) = f(a) = \overline{f}(a+I)$

从而 $g = \overline{f}$.

Proposition 1.30. Quotient Rings: Universal Property

Suppose that R is a ring and I is an ideal of R. The quotient ring is the ring R/I with the canonical projection $\pi: R \twoheadrightarrow R/I$ satisfying the following universal perperty:

For any ring S and ring homomorphism $f: R \to S$ such that $I \subseteq \ker f$, there exists a unique ring homomorphism $\bar{f}: R/I \to S$ such that $f = \bar{f}\circ\pi$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S \\ R/I \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Moreover, any ring satisfying the universal property is uniquely determined up to ring isomorphism.

(b)、I、J 为 L 的理想, $I \subset J$, 则 J/I 为 L/I 的理想.

且: $(L/I)/(J/I)$ 同构于 L/J

$\pi : L \to L/J$. $I \subseteq J = \operatorname{Ker}\pi$

π 诱导满射 $\bar{\pi} : L/I \to R/J$, $\operatorname{Ker}\bar{\pi} = J/I$.

(c)、I , J 为 L 的理想. 则 $(I+J)/J$ 与 $I/(I\cap J)$ 有自然同构.

考虑: $J \xrightarrow{\iota} J+I \xrightarrow{\pi} (J+I)/I$.

$$\operatorname{Ker}(\pi\circ\iota) = I \cap S .$$

表示: 同态 $\phi : L \to gl(V)$.

L 有限维, V 维数任数.

e.g. $ad : L \to gl(L)$.

保括号: $[ad_x, ad_y]z = ad_x ad_y z - ad_y ad_x z$.

$$= [x,[y z]] - [y [x z]]$$

$$= [x [y z]] + [[x z] y]$$

$$= [[x y] z] \quad \text{(by Jacobi identity)}.$$

$$= ad_{[x y]} z .$$

Ker ad: $x \in \operatorname{Ker} ad$, 则 $\forall y \in L$, $[x y] = 0$.

即 $\operatorname{Ker} ad = Z(L)$.

结论: 若 L 是单的, 则 $Z(L)=0$, $ad: L \to gl(L)$ 是单射.

故任意单的李代数同构于线性李代数.

($gl(L)$ 的子代数).

自同构：L 到 L 自己的同构，记作 $\mathrm{Aut}\, L$.
(Automorphism).

重要的例子：$L\subset gl(V)$ 为线性李代数.
若 $g\in GL(V)$ 为 V 中可逆自同态，$gLg^{-1}=L$，则
$x\to gxg^{-1}$ 是 L 的自同构. 如：$L=gl(V)$ 或 $sl(V)$.

e^{δ}：若 δ^k 幂零：$e^{\delta}=1+\cdots+\frac{\delta^{k-1}}{(k-1)!}$

且有 $e^{\delta x}\cdot e^{\delta y}=\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\delta^i x}{i!}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\delta^j y}{j!}\right)$.

$$=\sum_{n=0}^{2k-2}\left(\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\delta^i x}{i!}\right)\left(\frac{\delta^{n-i}y}{(n-i)!}\right)\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{2k-2}\frac{\delta^n(xy)}{n!}=e^{\delta(xy)}$$

e^{δ} 的逆：$\eta=e^{\delta}-1$，则其逆为：$1-\eta+\eta^2-\cdots\ \eta^{k-1}$

$$e^{\delta}(1-\eta+\eta^2-\cdots\eta^{k-1})$$

$$=(\eta+1)(1-\eta+\cdots\ \eta^{k-1})$$

$$=(\eta-\eta^2+\eta^3-\cdots\ \eta^k)+1-\eta+\eta^2\cdots\ \eta^{k-1}$$

$$=1+(-1)^{k-1}\cdot\eta^k.$$

$$\eta^k=(e^{\delta}-1)^k=\left(\sum_{n=1}^{k-1}\frac{\delta^n}{n!}\right)^k=0.$$

若一个同构可被写作 $e^{\mathrm{ad}x}$ 形式，且 $\mathrm{ad}x$ 幂零，则称其为内的 (inner)

$\mathrm{Aut}\, L$ 中，由内自同构生成的子群记作 $\mathrm{Int}\, L$.

它是正规子群：若 $\phi\in\mathrm{Aut}\, L$，$x\in L$，则 $\phi(\mathrm{ad}x)\phi^{-1}=\mathrm{ad}\,\phi(x)$

(因为 $\phi\, ad_x \cdot y = \phi([x\ y]) = [\phi(x)\ \phi(y)] = ad_{\phi(x)} \cdot \phi(y)$

$\phi\, ad_x \cdot \phi^{-1} = ad_{\phi(x)}$)

故 $\phi \cdot e^{ad_x}\, \phi^{-1} = e^{ad_{\phi(x)}}$

e.g. $L = sl(2, F)$，取标准基，令 $\sigma = e^{ad_x}\, e^{ad(-y)} \cdot e^{ad_x}$

$x = \begin{bmatrix} & 1 \\ & \end{bmatrix}$ $y = \begin{bmatrix} & \\ 1 & \end{bmatrix}$ $h = \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}$

知 $\sigma \in \operatorname{Int} L$.

$e^{ad_x} = 1 + ad_x$ $\quad e^{ad(-y)} = 1 + ad_{(-y)}$

$\sigma(x) = -y \quad \sigma(y) = -x \quad \sigma(h) = -h$.

可解与幂零的李代数：

首先定义这样一列 L 的理想：

$L^{(0)} = L$，$L^{(1)} = [L\ L] = \mathrm{Span}\{[x\ y] : \forall x, y \in L\}$

$L^{(n)} = [L^{(n-1)}\ L^{(n-1)}]$

若 $\exists\, n_0$ s.t. $L^{(n_0)} = 0$，则称其为可解的.

e.g. abel 的则可解，单的就不可解(因为 $[L, L] = L$).

e.g. $t(n, F)$ (上三角阵) 其基为 e_{ij} $(i \le j)$.

维数：$\frac{n(n+1)}{2}$. 考虑直接计算基的括积.

$[e_{ii}, e_{il}] = e_{il}$ $(i < l)$，故 $n(n, F) \subset [L, L]$

($n(n, F)$ 是严格上三角阵). 而 $t(n, F) = d(n, F) + n(n, F)$.

$d(n, F)$ 为 abel 的，故 $[L, L] = n(n, F)$

$d(n,F)$ …… $[e, e]$ …… (n,F).

现仅需考虑 $n(n,F)$ 是否可解.

$i<j$, $k<l$, 不失一般性令 $i\neq l$.

现对 e_{ij} 定义一个水平: $d=j-i$.

$$[e_{ij}, e_{kl}] = e_{il} \quad (若\ j=k).$$
$$\qquad\qquad = 0 \quad (\text{otherwise}).$$

$i<j=k<l$.

此时 $l-i\geq 2$.

则 $[L,L]$ 中的元素均为 $d\geq 2$ 的 e_{ij}

$$[e_{ij}, e_{kl}] = e_{il} \quad (j=k)$$
$$\qquad\qquad = 0 \quad (\text{otherwise})$$

$i<j=l<l$. $l-i\geq 4$.

一直这样下去，总会变成0的.

关于可解性的推论:

(a). 若 L 可解，则 L 的子代数，同态的像亦可解.

证: 同态是保括号的.

(b). 若 I 是 L 的一个可解理想，且 L/I 可解，则 L 也可解.

证: $(L/I)^{(n)}=0$. 考虑典范同态: $\pi: L\to L/I$.

$\pi(L^{(n)})=0$. $L^{(n)}\subset I=\ker\pi$. $I^{(n_2)}=0$

故 L 可解.

(c)、若 I, J 为 L 的可解理想, 则 $I+J$ 亦可解.

证 $(I+J)/J \cong I/(I\cap J)$

有同态 $\phi_1: I \to I/(I\cap J)$ (因为 $I\cap J$ 仍为理想).

I 可解, 知 $I/(I\cap J)$ 可解.

故 $(I+J)/J$ 可解.

有同态: $\phi_2: I+J \to (I+J)/J$ (因为 $I+J$ 仍为理想).

故 $I+J$ 可解.

应用: L 为李代数, S 是最大的可解理想 (不存在包含它的可解理想.)

若 I 为任一可解理想, 由最大性, 知 $I+S=S$, 或 $I\subset S$

故 S 是唯一的! 这样的 S, 称为 L 的根 (radical).

记作 $\mathrm{Rad}\, L$.

如 $\mathrm{Rad}\, L=0$, 则 L 是半单的 (semisimple)

e.g. 一个单的李代数一定是半单的.

因为其理想仅有自己与 0, 且 L 不可解.

$L=0$ 也是半单的.

$\forall$ 李代数 L, $L/\mathrm{Rad}\, L$ 也是半单的.

(因为: 设 J 为 $L/\mathrm{Rad}\, L$ 的可解理想, $p: L \to L/\mathrm{rad}\, L$

为商映射. $U=p^{-1}(J)$ 是 L 中, 包含 $\mathrm{Rad}\, L$ 的一个理想.

$\underbrace{U/\mathrm{rad}\, L}_{\mathrm{Ker}} \cong \underbrace{J}_{\mathrm{Im}}$. $\mathrm{rad}\, L$ 可解, J 可解, 故 $U/\mathrm{rad}\, L$ 可解.

则 U 可解 $\mathrm{rad}\, L$ 为最大可解理想 则 $U=\mathrm{rad}\, L$.

$U/\mathrm{rad}L=0$，$J=0$，$L/\mathrm{rad}L$ 半单).

幂零：定义 L 的一列理想：$L^0=L$，$L^1=[L,L^0]$，$L^2=[L,L^1]$

$L^n=[L,L^{n-1}]$. 称为降中心列 (lower central series).
如 $\exists n$ s.t. $L^n=0$，则称 L 幂零.
写开来：$[x_1,[x_2,[\cdots[x_n,Y]]\cdots]]=0$ $\mathrm{ad}x_1\mathrm{ad}x_2\cdots\mathrm{ad}x_n Y=0$
x：任意.

Abel 的一定幂零. 显然，$L^{(i)}\subset L^i$ 故而幂零的一定

可解. 反过来不一定对.

e.g. $L=t(n,\mathbb{F})$ (上三角阵).
由于 $[e_{ii},e_{il}]=e_{il}$，$e_{ii}\notin[L,L]$，
知：$L^n=L^1=n(n,\mathbb{F})$ (严格上三角阵).

推论：若 L 是一个李代数.
(a). 若 L 幂零，则 L 的子代数、同态的像也是幂零的.

(b). 若 $L/Z(L)$ 幂零，则 L 亦幂零.
证：知 $\exists n$ s.t. $L^n\subset Z(L)$，则 $L^{n+1}=[L,L^n]=0$.
(c). 若 L 非 0 且幂零，则 $Z(L)\neq 0$
如 $[L,L^n]\neq 0$，$[L,L^{n+1}]=0$，则 $Z(L)=L^{n+1}$.

若 L 是幂零的，则 $\exists n$，$\forall x\in L$，$(\mathrm{ad}x)^n=0$.
称为 ad-幂零.
反过来也对：
Engel 定理：如 L 所有元素均为 ad-幂零，则 L 幂零.
Lemma：$x\in gl(V)$ 为一个幂零的自同态，则 $\mathrm{ad}x$ 亦幂零.
证：$\mathrm{ad}_x y=xy-yx=\lambda_x y-\rho_x y$
$\mathrm{ad}_x=\lambda_x-\rho_x$ 因为 $x^n=0$，知 $\lambda_x^n,\rho_x^n=0$.

$ad_x = \lambda_x - \rho_x$ [illegible]

λ_x 与 ρ_x 可交换: $\lambda_x \rho_x y = xyx \quad \rho_x \lambda_x y = xyx$

$$(ad_x)^{2n} = (\lambda_x - \rho_x)^{2n} = 0.$$

(这个lemma反过来不一定对, e.g. $x = id_V$.)

Thm 1: 令 L 为 $gl(V)$ 的子代数, V 有限维。若 L 由幂零的自同态组成, $V \neq 0$, 则存在非零向量 $v \in V$ s.t. $\forall x \in L$, $xv = 0$

证: 归纳. $\dim L = 1$, 显然.

$\dim L = n$ 时, 取 L 的极大真子代数 K. $\dim L/K < n$.

def: $\varphi: K \to gl(L/K)$.

$\forall x \in K$: $\varphi(x): y + K \to [x, y] + K$. ($\varphi$就是 $\overline{ad}$.)

若 $y_1 - y_2 = K$, 则 $[x, y_1] - [x, y_2] = [x, y_1 - y_2] \in K$.

$$\varphi(x) \cdot (y_1 + K) = \varphi(x) \cdot (y_2 + K)$$

故 $\varphi(x)$ 定义合理, $\varphi \in gl(L/K)$.

$\forall x_1, x_2 \in K$, $y \in L$: $\varphi([x_1, x_2])(y + K) = [[x_1, x_2] y] + K$.

$$[\varphi(x_1), \varphi(x_2)] \cdot (y + K) = (\varphi(x_1)\varphi(x_2) - \varphi(x_2)\varphi(x_1))(y + K).$$

$$= [x_1 [x_2, y]] - [x_2, [x_1, y]] + K$$

$$= [[x_1, x_2] y] + K.$$

则 $\varphi([x_1, x_2]) = [\varphi(x_1), \varphi(x_2)]$

$$\dim \varphi(K) \leq \dim K < \dim L.$$

由归纳假设, $\exists\, 0 \neq u + K \in L/K$, $\forall x \in K$.

$\overline{ad}[x, u + K] = [x, u] + K = 0 \quad [x, u] \in K$

$u \in N_L(K)$. 但 $u \notin K$，故 $K \subsetneq N_L(K)$.

由 K 极大性，$N_L(K) = L$.

则 K 为 L 理想.

取 $\alpha \in L - K$，$\mathbb{F}\alpha$ 是子代数. 故 $\mathbb{F}\alpha \subset K$

$[K \oplus \mathbb{F}\alpha, K \oplus \mathbb{F}\alpha] \subseteq K \subseteq K \oplus \mathbb{F}\alpha$.

故 $K \oplus \mathbb{F}\alpha$ 为 L 中包含 K 子代数. 则 $L = K \oplus \mathbb{F}\alpha$.

由归纳假设：$\exists\, 0 \neq v \in V$，$\forall x \in K$，$x(v) = 0$.

$W := \{v \in V : \forall x \in K, x(v) = 0\}$

$\forall x \in K$，$y \in L$，$v \in W$.

$x\cdot(y(v)) = \underbrace{[x\ y]}_{\in K}(v) + y(\underbrace{x(v)}_{0})$

则 W 为 L 不变 故 $\alpha(W) \subseteq W$. α 幂零，$\alpha|_W$ 有特征向量 $v \in W$，故 $\forall x \in L$，$x(v) = 0$.

Engel Thm：L 为 $\mathbb{F}$ 上有限维李代数，L 幂零 $\Leftrightarrow$ $\forall x \in L$，ad_x 幂零.

$\Rightarrow$：已证.

$\Leftarrow$：$\dim L = 1$：成立.

设对 $\dim L < n$ 均成立. $ad: L \to gl(L)$.

$\forall x \in L$，ad_x 为 L 上幂零自同态.

$\exists\, y \in L$ s.t. $\forall x \in L$，$[x\ y] = 0$.

$y \in Z(L)$ $Z(L) \neq 0$.

$\dim(L/Z(L)) < \dim L$

$\forall\ \bar{x} = x + Z(L)$，$ad_{\bar{x}}$ 幂零 则 $L/Z(L)$ 幂零

证毕!

定义: V有限维, flag 是一串子空间:

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V, \quad \dim V_i = i.$$

$x \in \operatorname{End} V$.

若: $xV_i \subset V_i$ $\forall i$, 则说 x 在 flag 下不变.

推论: L 为幂零李代数, 则 $\exists$ flag $\subset V$. $xV_i \subset V_{i-1}$, $\forall i$.

也就是说, 存在 V 一组基, 使 L 的矩阵为严格上三角.

证: 由 Engel 定理, $\exists v \in V$, $v \neq 0$, $Lv = 0$.

$V_1 = \operatorname{span} v$. $W = V/V_1$ 用维数归纳即可.

$\dim V = 1$ 当然成立, 设对于 $\dim V < n$ 均成立.

$\dim W < n$. 则 $\exists\ 0 = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{n-1} = W$.

拉回到 V 中即可.

Lemma: L 幂零, K 为 L 理想, 若 $K \neq 0$, 则 $K \cap Z(L) \neq 0$,