Lie定理：L是$gl(V)$的可解子代数，V有限维，若$V\neq 0$，
则L中所有自同态在V中有公共特征向量.

Step 1. $[L,L]\subsetneq L$.（因为可解）.

$L/[L,L]$交换，因为：$\bar{x}=x+\underbrace{u}_{[L,L]}$，$\bar{y}=y+\underbrace{v}_{[L,L]}$

$[\bar{x},\bar{y}]=[x,y]+[u,y]+[u,y]+[x,v]=\bar{0}$

则商空间中，任意子代数为一个理想.

其次：可解/幂零李代数有一个余维数为1的理想.

（证：$\pi: L\to L/[L,L]$. 取余维数为1的$I\subset L/[L,L]$，

I为理想，因为$[L,L]\subset\pi^{-1}(I)$，$\pi^{-1}(I)$为L的理想

$\pi^{-1}(I)$为L的余维数为1的理想）.

设该理想为K，K当然可解. $\dim K<n$. 由归纳假设，

$W=\{v\in V: \forall x\in K, x(v)=\lambda(x)\cdot v$. 特征值函数为$\lambda(x)$.

$\lambda: K\to F$.

$\dim K=n-1$，故$\exists\, z\in L$ s.t. $L=K\oplus Fz$.

下证W是L-不变的：

$\forall\, x\in L, y\in K, w\in W$:

特征值.

$$y(x(w))=\underbrace{[y,x]}_{\in K}(w)+x(y(w))=\underbrace{[y,x](w)+\underline{\lambda(y)}\,x\cdot(w)}_{\text{希望它为0.}}$$

$[y,x](w)=\lambda([y,x])\cdot(w)$

对$0\neq w\in W$，$x\in L$，

记$W_i:=\operatorname{span}\{w, x(w),\cdots x^{i-1}(w)\}$

$x(W_i)\subseteq W_{i+1}$ V有限维，$\exists$最小d s.t. $W_d=W_{d+1}$

W_i为K-不变，

证：$i=1$ 时，$\forall\, y\in K$，$y(w)=\lambda(y)w\in W_1$

假设对小于 i 的均成立.

$\forall\, y\in K$，$y\cdot x^{i-1}(w)=y\cdot x\cdot x^{i-2}(w)$

$$=[y,x]\cdot x^{i-2}(w)+\underbrace{xy\cdot x^{i-2}(w)}_{\in W_{i-1}\text{（归纳假设）}}\in W_i.$$

$[y,x]\in K$，

则 $[y,x]x^{i-2}(w)\in W_{i-1}$

故 $y\cdot x^{i-1}(w)\in W_i$ 故 W_i 为 K 不变.

$\forall\, x\in L,\ y\in K,\ w\in W,\ y\cdot x^i(w)\in\lambda(y)\cdot x^i(w)+W_i$

证：$i=1$：$y\cdot x\,w=[y,x]w+xy(w)=\lambda([y,x])w+\lambda(y)\cdot x(w)$

设对小于 i 均成立：

$$y\cdot x^i(w)=y\cdot x\cdot x^{i-1}(w)=[y,x]x^{i-1}(w)+xy\cdot x^{i-1}(w)$$
$$\in[y,x]x^{i-1}(w)+x\cdot(\lambda(y)\cdot x^{i-1}(w)+W_{i-1})$$
$$\subseteq\underbrace{[y,x]x^{i-1}(w)}_{\in W_i}+\lambda(y)x^i(w)+W_i$$

故 $y\cdot x^i(w)\in\lambda(y)x^i(w)+W_i$.

$\forall\, y\in K$，$y|_{W_d}$ 于 $\{w,x(w)\cdots x^{d-1}(w)\}$ 基下：

$$\begin{bmatrix}\lambda(y) & & & * \\ & \lambda(y) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda(y)\end{bmatrix}$$

$\mathrm{tr}([y,x]|_{W_d})=d\cdot\lambda([y,x]|_{W_d})$.

$xy(W_d)\subseteq x(W_d)\subseteq W_{d+1}=W_d$.

$$y\times(W_d)\subseteq y\cdot(W_{d+1})\subseteq W_{d+1}=W_d.$$

则 $tr([y,x]|_{W_d})=0\quad \lambda([y,x])=0.$

终于，证明了 W 是 L 不变的.

$z(W)\subseteq W$. $z|_W$ 有特征值 $\lambda_0\in\mathbb{F}$ 与特征向量 $0\neq v\in W$

$z(v)=\lambda_0 v.$

将 λ 延拓至 L. $\bar{\lambda}:L\to\mathbb{F}$. $k+az\to\lambda(k)+a\cdot\lambda_0.$
$k\in K,\ a\in\mathbb{F}.$

$\forall x\in L,\ x=k+az.$

$$x\cdot(v)=k\cdot v+a\cdot\lambda_0\cdot v=(\lambda(k)+a\lambda_0)v$$
$$=\lambda(x)\cdot v.$$

回到 Lie Thm:

$\dim V=1$ 成立

设对 $\dim V<n$ 均成立，则 $\dim V=n$ 时：

$\exists\ v_1\in V,\ x(v_1)=\lambda(x)\cdot v_1\ \forall x\in L.$

$V_1=\operatorname{span} v_1,\ \dim V/V_1=n-1<n$

$x\in L$ 可诱导 V/V_1 的变换 $x:v+V_1\to x(v)+V_1.$

将 L 视为 $gl(V/V_1)$ 的可解子代数.

知 $\exists$ V/V_1 的 Flag：$0=V_1/V_1\subset V_2/V_1\cdots\subset V_n/V_1=V/V_1$

$\forall x\in L,\ x(V_i/V_1)\subseteq V_i/V_1$

故 $\exists$ Flag $0=V_0\subseteq V_1\cdots V_n=V.\quad LV_i\subseteq V_i.$

推论1：L 可解，则存在 L 的理想链 $0\subseteq L_0\subseteq L_1\cdots\subseteq L_n=L$

s.t. $ad \subseteq L_i$.

证：$ad: L \to gl(L)$. L 可解，则 adL 亦可解.

故 $\exists$ L 的 Flag $0 \subseteq L_0 \subseteq L_1 \subseteq L_2 \cdots \subseteq L_n = L$.

$ad(L_i) \subseteq L_i$, $[L, L_i] \subseteq L_i$. L_i 为理想.

推论2：设 L 可解，则 $\forall x \in [L, L]$, $ad_L x$ 幂零，进而 $[L, L]$ 是幂零李代数.

证：adL 为 $gl(L)$ 可解子代数.

$\exists$ 基 s.t. adL 为上三角阵. 则 $[adL, adL]$ 为严格上三角阵.

$ad[L, L]$ 的矩阵为严格上三角阵

$ad_{[L,L]}x$ 幂零. 由 Engel Thm. $[L, L]$ 幂零.

Jordan-Chevalley 分解：

元素的半单性：V 为 $\mathbb{F}$ 上的有限维向量空间，$x \in End(V)$. 如 x 的最小多项式于 $\mathbb{F}$ 无重根，则称 x 半单.

线代中有：

1、$\mathbb{F}$ 代数闭，半单 $\Leftrightarrow$ 可对角化.

2、$x, y \in End(V)$，且 $xy = yx$，则 x. y 可同时对角化，$x+y$, $x-y$ 半单.

3、如 $x \in End(V)$ 半单，且对于子空间 $W \subseteq V$, $x(W) \subseteq W$, $x|_W$ 亦半单. (因为 $P_{x|_W} \mid P_x$).

Thm：V 为 $\mathbb{F}$ 上有限维向量空间，$x \in End(V)$.

(1)、$\exists!$ $x_s, x_n \in End(V)$ s.t. $x = x_s + x_n$. x_s 半单，x_n 幂零.

且 $x_n x_s = x_s x_n$.

(2)、$\exists$ 多项式 $p(t), q(t) \in \mathbb{F}[t]$, $p(0) = q(0) = 0$, $x_s = p(x)$, $x_n = q(x)$.

(3)、若 $A \subseteq B \subseteq V$ 为子空间，$x(B) \subseteq A$，则 $x_s(B) \subseteq A$, $x_n(B) \subseteq A$.

先证(2)：设 x 特征值 $\lambda_1, \cdots \lambda_k$，重数 $m_1, \cdots m_k$.

$$\varphi(t) = \prod_{i=1}^{k} (t-\lambda_i)^{m_i}.$$

$\varphi_i(t) = (t-\lambda_i)^{m_i}$ $\quad V_i := \operatorname{Ker} \varphi_i$.

$V = \bigoplus_{i=1}^{k} V_i$ $\quad V_i$为x-不变. φ_i两两互素.

由CRT，$\exists\, p(t) \in \mathbb{F}[t]$，$p(t) \equiv \lambda_i \pmod{\varphi_i}$ $\quad p(t) \equiv 0 \pmod{t}$

若$\exists\, \lambda_i = 0$，则不用加上$p(t) \equiv 0 \pmod{t}$.

$q(t) := p(t)$. 则$p(0) = q(0)$.

$x_s := p(x)$，$x_n := q(t)$. $x = x_s + x_n$. x_s, x_n可交换.

$$x_s|_{V_i} = p(x|_{V_i}) = \lambda_i \cdot \mathrm{Id}_{V_i}$$

x_s最小多项式：$\prod (\lambda - \lambda_i)$. x_s半单.

$$(x_n|_{V_i})^{n} = (x|_{V_i} - \lambda_i \cdot \mathrm{Id}_{V_i})^{n_i} = \varphi_i(x|_{V_i}) = 0.$$

知x_n幂零.

唯一性：若有其余 $x = \underset{\text{半单}}{s} + \underset{\text{幂0}}{n}$，$sn = ns$.

$s + n = x_s + x_n \qquad x_s - s = n - x_n$.

s, n可与x交换，则s, n可与x_s, x_n（因为是多项式）交换.

则$x_s - s$半单，$n - x_n$幂零. $\quad x_s - s = n - x_n = 0$.

(3)、$p(t)$，$q(t)$无常数项，证毕.