初等函数不定积分的初等表达：微分代数导引

林汪炀

简介

本文主要从代数角度出发来解释 1835 年 Liouville 在其论文 [Lio35] 中提出的, 有关所谓 “初等” 函数是否有 “初等” 不定积分的定理. 我们将在文章中给出 “初等” 合理的定义, 并从代数的角度来解释这一问题. 如今微分代数的深入研究也引出了一些对代数偏微分方程的讨论, 以及更深刻的 $\mathcal{D}$-模等理论的研究.

本文主要参考 R.C. Churchill 在 2003 年所写的一篇笔记 [Chu03]. 笔记中有一些错误在本文中予以修正.

若未加特别说明, 本文语境下的环都是含幺交换环. 环 R 的单位元记为 1_R, 若不引起歧义, 则可以直接写为 1.

1 函数域与域扩张

在本节中, 我们考虑的域 K 是实数域 $\mathbb{R}$ 或复数域 $\mathbb{C}$.

我们沿用抽象代数中常用的记号, 用 $K[x]$ 表示域 K 上的多项式环, 其中 x 是一个关于 K 的不定元; 从分析的视角来看, 其中每一个多项式 $p(x)$ 都可以视作一个映射 $p: K \to K$. 我们将 $K[x]$ 的分式域记为 $K(x)$, 其中的元素称作有理函数, 都可以表示为 $p(x)/q(x)$ 的形式, 其中 $\gcd(p(x), q(x)) = 1$; 而从分析的角度来看, 每一个有理函数都可以视作一个映射 $r: K \to K \cup \{\infty\}$.

我们回顾一下复变函数中关于全纯和亚纯的定义, 并不失一般性地推广到一个特征为 0 赋有拓扑的域上. 这里的拓扑可能需要适当的分离性条件如 T_3 等.

定义 1.1 设 $U \subset K$ 是 K 中的非空开集, 同时有一点 $k_0 \in U$. 函数 $f: U \to K \cup \{\infty\}$ 称为

(i) 在 k_0 点全纯, 若存在一个包含 k_0 的开邻域 $V \subset U$, 使得 f 在 V 上可以写成以 k_0 为中心的幂级数展开的形式.
(ii) 在 k_0 点亚纯, 若存在 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 使得函数 $k \mapsto (k-k_0)^n f(k)$ 在 k_0 点全纯.

我们现在局部地看开集 U 上亚纯函数全体 $\mathfrak{M}(U)$, 它关于函数的加法和乘法构成一个域, 它是 $K(x)$ 的一个域扩张. 现在我们最关心的问题就是找到一个中间域 $L, K(x) \subset L \subset \mathfrak{M}(U)$ 使得其对于求导是封闭的 (后面我们会定义这一概念).

更一般地, 对于更小的开集 $V \subset U$ 可以看到 $\mathfrak{M}(U)$ 可以嵌入 $\mathfrak{V}$, 相当于说 $\mathfrak{M}$ 是一个类似反变函子的作用; 所以也可以使用函数芽来看这一部分. 本文我们使用更为朴素的办法.

最后我们认为 U 取的都是函数及原函数的单值分支, 以避免多值函数的出现.

2 微分代数

本节中用 R 来表示一个含幺交换环. 我们接下来研究的对象是带有"求导"或者"微分"运算的环及其分式域, 我们先考虑这一类环所具备的良好性质, 并考察这些性质是否能够延伸到其分式域上. 首先我们给出微分环的定义.

定义 2.1 设环 R 上有一个 Abel 群的同态 $\delta: R \to R$, 若对任意 $r, s \in R$ 满足 Leibniz 法则:

$$\delta(rs) = \delta(r)s + r\delta(s),$$

则称 (R, δ) 为一个**微分环**, 不引起歧义的情况下简记为 R. 称 δ 为 R 上的一个**导子**. 若 R 是一个域, 我们称之为**微分域**.

我们进一步定义微分环的同态使其构成一个范畴

定义 2.2 若 $\varphi: (R, \delta_R) \to (S, \delta_S)$ 是一个环 R 到 S 的环同态 (默认保持单位元) 使得

$$\delta_S \circ \varphi = \varphi \circ \delta_R,$$

则称 φ 是两个微分环之间的同态.

微分环的一个所谓**微分理想** $\mathfrak{i}$ 可以自然地定义为对于导子封闭的理想, 也即, 若 $r \in \mathfrak{i}$, 则可以得到 $\delta(r) \in \mathfrak{i}$.

例 2.3 我们接下来给出一些常见的微分环的例子.

(i) 考虑实系数多项式环 $\mathbb{R}[x]$ 及求导算子 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$, 这是一个微分环, 更进一步地是一个微分代数 (对求导封闭的代数).
(ii) 令 $K = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 考虑 $K(x)$ 及其上的求导算子 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$, 这样构成一个微分域.
(iii) 令 $K = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, 同时 $U \subset K$ 是一个非空开集. 此时求导算子 $\mathrm{d}/\mathrm{d}x$ 赋予了 $\mathfrak{M}(U)$ 一个微分域的结构.
(iv) 平凡导子 δ, 指的是任一环 R 上, 满足对环中任一元素 r 有 $\delta(r) = 0$ 的导子.

(v) 对于任何的一个微分环之间的同态 $\varphi : R \to S$ 来说, $\operatorname{Ker} \varphi$ 是一个微分理想.

有了理想, 我们很自然地想像抽象代数中一样定义商结构. 当 (R, δ) 是一个微分环, $\mathfrak{i}$ 是其一个微分理想, 此时 $R/\mathfrak{i}$ 上诱导的导子 $\bar{\delta}$ 满足 $\bar{\delta} \circ \pi = \pi \circ \delta$, 其中 π 是自然投射, 也即商环上的导子使得 π 成为一个微分环的同态. 容易验证 $\bar{\delta}(r + \mathfrak{i}) = \delta(r) + \mathfrak{i}$.

考虑到我们要在 $K(x)$ 到 $\mathfrak{M}(U)$ 的扩张之间寻找一个合适的中间域, 使得这个中间域对求导封闭. 我们给出如下定义

定义 2.4 考虑 (R, δ_R) 是一个微分环, 同时也是 (S, δ_S) 的子环, 使得 $\delta_S|_R = \delta_R$. 我们称 R 是 S 的一个微分子环, $S \supset R$ 是一个**微分扩张**. 导子 δ_R 被称为扩张到 S 上, δ_S 称为 δ_R 的一个扩张. 同样的定义可以延伸到整环和域上.

例 2.5 我们给一些例子, 这些在之后可能将用到.

(i) 我们记 $\operatorname{Ker} \delta_R$ 为 R_C, 这是 R 的一个微分子环. 容易证明整数环可以自然地嵌入 R_C. 我们称 R_C 为 R 的常元子环.

(ii) 设 $K = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, $U \subset K$ 是一个非空开集. 那么 $K(x) \subset \mathfrak{M}(U)$ 是一个微分域扩张.

(iii) 现在假设 R 是一个整环, 及其分式域 $\operatorname{frac}(R)$. 则我们可以将导子 δ 从整环扩张到其分式域上, 使得 $\delta(r/s) = (\delta(r)s - r\delta(s))/s^2$.

对于域来说, 域的特征很大程度上决定了导子的性质. 有限域的情况, 会变得简单:

命题 2.6 有限域上的导子都是平凡的.

证明 设域 K 是特征为 $p > 0$ 的有限域, 则 Frobenius 映射 $k \in K \mapsto k^p \in K$ 是一个同构. 这样对任意域中元素 k, 存在一个 l, 使得 $k = l^p$. 所以 $\delta(k) = pl^{p-1}\delta(l) = 0$. □

更进一步地, 我们有如下结论

命题 2.7 假设 K 是微分域.

(i) 若 K 的特征为 0, 且导子非平凡, 那么 $K \backslash K_C$ 中的任一元素在 K_C 上超越. 特别地, 这是一个超越扩张.

(ii) 若 K 有正特征, 则 K_C 到 K 是一个代数扩张.

证明 (i) 假设存在一个元素 $l \in K \backslash K_C$ 在 K_C 上代数, $\operatorname{irr}(l, K_C) = x^n + \sum_{j=0}^{m} c_j x^j$. 这里我们考虑所有 $c_j \neq 0$, 所以 $0 \leq m < n$. 此时必有这样的 m 存在, 否则 $l^n = 0$ 将推出 $l = 0 \in K_C$ 的矛盾. 我们对 $p(l) = 0$ 两边求导得到

$$0 = nl^{n-1}\delta(l) + \sum_{j=0}^{m} jc_j l^{j-1}\delta(l) = n\delta(l)\left(l^{n-1} + \sum_{j=0}^{m} \frac{jc_j}{n} l^{j-1}\right),$$

由于 $\delta(l) \neq 0$, 再有特征 0 的条件, 所以 $l^{n-1} + \sum_{j=0}^{m} \frac{jc_j}{n} l^{j-1} = 0$, 这与最小的化零多项式矛盾.

(ii) 容易看出对任何的 $k \in K \backslash K_C$, 有 $\delta(k^p) = pk^{p-1}\delta(k) = 0$, 这样 $k^p \in K_C$, 所以考虑 $\operatorname{irr}(k, K_C) = x^p - k^p$ 即可. □

3 无新常元的微分环扩张

对于一个微分环扩张 $R \subset S$ 来说, 我们容易验证 $R_C \subset S_C$. 在微积分中我们求解原函数等问题时, 所谓常数的集合是不会变动的, 所以我们接下来考虑 $R_C = S_C$ 的情况, 我们称为**无新常元的微分环扩张**.

对于有新常元的这一类扩张, 我们可以有这样一个例子: 考虑 $\mathbb{R}[x] \subset L$, 其中 L 是实变量复值的包含 $\exp ix$ 的函数域. 此时 $\mathbb{R}[x]_C = \mathbb{R}$, 而 $i = (\exp ix)'/\exp ix \in L \backslash \mathbb{R}[x]$, 所以 $L_C = \mathbb{C}$.

假设 K 是实数域或复数域, U 是 K 的非空开子集. 则 $\mathfrak{M}(U)$ 的常元是在 U 的各个连通分支上为常值的函数. 所以, 当 U 是连通的时候, $K(x) \subset \mathfrak{M}(U)$ 是一个无新常元的微分域扩张.

对于无新常元这一性质有等价描述:

命题 3.1 当 $R \subset S$ 是一个微分环扩张, 接下来的几个命题是等价的:

(i) 这是一个无新常元的扩张.
(ii) 若 $r \in R$ 在 R 中有**原元** (即存在 $l \in R$ 使得 $\delta(l) = r$), 则 r 在 $S \backslash R$ 中无原元.
(iii) 若 $s \in S \backslash R$ 满足 $\delta(s) \in R$, 则 $\delta(s)$ 在 R 中无原元.

证明 (i)⇒(ii): 当 $r \in R$ 有原元 $t \in R$ 的同时, 有原元 $s \in S \backslash R$, 那么 $s - t \in S \backslash R$ 是一个常元, 故矛盾.

(ii)⇒(1): 当存在一个常元 $s \in S \backslash R$ 时, 对于 $0 \in R$ 来说, 其本身是 R 中的一个原元, 故与 (ii) 矛盾.

(ii)(iii) 的等价性容易验证. □

对于无新常元的微分域扩张我们可以讨论元素的代数性与超越性:

命题 3.2 假设 $K \subset L$ 是一个特征 0 的无新常元的微分域扩张, $l \in L \backslash K$ 满足 $\delta(l) \in K$, 则有

(i) 任意 K 上多项式 $p(x) = \sum_{j=0}^{n} k_j x^j, n > 1$, 有 $\delta(p(l))$ 可以表示为 $q(l)$, 其中 $q(x) \in K[x]$; 此时, 若 k_n 不是常元, 则 $\deg q(x) = n$, 否则, $\deg q(x) = n - 1$.
(ii) l 在 K 上超越.

证明 首先有

$$\delta(p(l)) = \delta(k_n) l^n + n k_n l^{n-1} \delta(l) + \delta(k_{n-1}) l^{n-1} + \cdots + \delta(k_0)$$

若 k_n 不是常元, 问题已经解决. 若 k_n 是常元, 则考虑 $\delta(k_{n-1}) + n k_n \delta(l) = \delta(k_{n-1} + n k_n l)$ 是非零的, 否则 $k_{n-1} + n k_n l$ 是常元, 由于特征 0, 这是新增的常元, 产生矛盾.

所以, 若 l 在 K 上代数, 则记 $\operatorname{irr}(l, K) = p(x)$, 那么 $0 = \delta(p(l)) = q(l)$, 这样 $p(x)$ 是一次多项式, 这说明 $l \in K$, 矛盾. □

上述命题在常见的亚纯函数域上体现为如下推论:

推论 3.3 假设 $K=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, U 是 K 的一个非空连通开子集. 若任一亚纯函数 $f\in\mathfrak{M}(U)\backslash K(x)$, 其导数 $f'\in K(x)$, 则 f 在 $K(x)$ 上超越.

忽略多值性, 假设能在足够好的单值局部内考虑:

推论 3.4 实 (复) 自然对数在实 (复) 有理函数域上是超越的. 实的反正切函数在实有理函数域上是超越的.

我们现在讨论扩张中的代数元.

命题 3.5 假设 $K\subset L$ 是一个无新常元的微分域扩张 (特征 0). $l\in L\backslash K$ 且 $\delta(l)/l\in K$. 那么

(i) l 在 K 上代数, 当且仅当存在整数 $n>1$ 使得 $l^n\in K$, 且 n 可以是 $\mathrm{irr}(l,K)$ 的次数;

(ii) 当不满足 (i) 时, 对于任一次数大于零的多项式 $p(x)$, 考虑 $\delta(p(l))$, 这仍然是一个关于 l 的 n 次多项式. 更进一步地, $\delta(p(l))$ 是 $p(l)$ 的倍式当且仅当 $p(l)$ 是一个单项式.

证明 令 $b=\delta(l)/l\in K$, 由于无新增的常元, 所以 $b\neq 0$.

(i) 我们假设 l 在 K 上代数, 则有 K 上一极小多项式将 l 化零:

$$l^n+c_m l^m+\cdots+c_0=0, \tag{1}$$

其中 $0\le m<n, c_m\neq 0$, 这样的 m 必须存在, 否则 $l=0$. 等式两边用导子作用:

$$bnl^n+(\delta(c_m)+bmc_m)l^m+\cdots+\delta(c_0)=0, \tag{2}$$

式 (1) 乘上 bn 与式 (2) 相减, 次数降低但 l 的化零多项式有极小性, 所以后面的 m 项系数也均变为 0. 这样 $\delta(c_m)+mbc_m=bnc_m$, 也即 $\delta(c_m)/c_m=(n-m)b$. 进一步

$$\begin{aligned}\frac{\delta(c_m l^{m-n})}{c_m l^{m-n}}&=\frac{(m-n)c_m l^{n-m-1}bl+\delta(c_m)l^{n-m}}{c_m l^{m-n}}\\&=\frac{(m-n)bc_m l^{m-n}+\delta(c_m)l^{m-n}}{c_m l^{m-n}}\\&=(m-n)b+\delta(c_m)/c_m\\&=0,\end{aligned}$$

这样 $c_m l^{m-n}\in L_C=K_C\subset K$, 所以 $l^{n-m}\in K$, 上面的推理可以从 c_m 一直推广到 c_0, 所以 $l^n\in K$.

反过来的充分性是显然的.

(ii) 我们假设

$$\delta(p(l))=(\delta(k_n)+bnk_n)l^n+\cdots+kpr_0=0.$$

此时若 $\delta(k_n l^n)=\delta(k_n)+bnk_n=0$, 则 $k_n l^n\in K_C\subset K$, 这得到 $l^n\in K$, 矛盾. 所以 $\delta(p(l))$ 关于 l 仍然是 n 次的.

当 $p(l)=kl^n$ 时, $\delta(p(l))=(\delta(k)+nbk)l^n=(\delta(k)+nbk)k^{-1}\cdot kl^n$. 这样 $\delta(p(l))$ 是 $p(l)$ 的倍式.

反过来, 若 $\delta(p(l))=q(l)p(l)$, 对比次数得到 $q(l)=c\in K$. 若 $p(l)$ 不是单项式, 则其至少有次数不同的两项 k_nl^n 和 k_ml^m. 这样

$$\delta(k_j)+jk_jb=ck_j,\quad j=m,n,$$

由于无新增常元, $c\neq 0$, 所以

$$\frac{\delta(k_n)+nk_nb}{k_n}=\frac{\delta(k_m)+mk_mb}{k+m},$$

交叉相乘有

$$a=(n-m)k_nk_mb+k_m\delta(k_n)-k_n\delta(k_m)=0.$$

这意味着

$$\delta\left(\frac{k_nl^n}{k_ml^m}\right)=\frac{al^{n+m}}{(k_ml^m)^2}=0,$$

这推出 $\frac{k_nl^n}{k_ml^m}$ 是新增常元, 矛盾. 所以 $p(l)$ 是单项式. □

关于上述命题还有如下推论:

推论 3.6 对于任一非零实有理函数 $g(x)$, 指数 $\exp g(x)$ 在实有理函数域 $\mathbb{R}(x)$ 上超越.

证明 验证其满足上述命题的条件:

$$(\exp g(x))'/\exp g(x)=g'(x)\in\mathbb{R}(x),$$

且

$$(\exp g(x))^n\notin\mathbb{R}(x),\quad \forall n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}.$$ □

4 导子的扩张

接下来这一节我们将考虑对于一个域扩张 $K\subset L$ 来说, 如何将 K 上的导子 δ 扩张到 L 上, 使其成为一个微分域扩张.

首先我们给一些更加一般化的微分代数定义:

定义 4.1 假设 R 是一个含幺交换环, $\mathcal{A}$ 是一个 R-代数 (交换的), M 是一个 $\mathcal{A}$-模 (自然地拥有 R-模结构), 我们称一个 R-模同态 $\delta:\mathcal{A}\to M$ 是一个 **R-导子**, 若 Leibniz 法则满足:

$$\delta(ab)=a\cdot\delta(b)+\delta(a)\cdot b,\quad \forall a,b\in\mathcal{A}. \tag{3}$$

这样定义是微分环定义的一般化. 微分环 R 上的导子就可以视为一个 R_C-导子.

现在我们回到本节的主要问题, 我们将对于任一 $l\in L\backslash K$ 定义导子对其的作用, 使得导子 δ 扩张到 L 上. 我们找到一个 L 上的 K_C-导子, Leibniz 法则保证了其是一个 L_C-导子, 所以我们只需要把 δ 扩张为一个 L 上的 K_C-导子.

我们先将导子 $\delta: K \to K$ 扩张为一个 $\delta: K(l) \to L$ 的 K_C-导子.

情形 I. l 是超越元.

这种情况下 $\{l^n\}_{n\geq 0}$ 是 K-代数 $K[l]$ 作为 K-线性空间的一组基. 对任意 $a \in K[l]$ 可以表示为基的 K-线性组合: $a = \sum_j a_j l^j$. 为了确定导子的扩张, 只需要对环 (域) 扩张的生成元 l 确定其在导子下的像, 在验证这确实是一个导子的扩张. 我们任意选定一个 $m \in L$, 来定义一个 K_C-线性映射 $\delta: K[l] \to L$

$$\delta: a = \sum_j a_j l^j \mapsto \sum_j a_j' l^j + \sum_j j a_j l^{j-1} m,$$

这里选取的 m 就是 $\delta(l)$. 下面我们说明 δ 是一个 $K[l]$-导子. $K[l]$ 显然是一个 K_C 代数, L 显然是个 $K[l]$-模, 我们只需要验证 Leibniz 法则成立. 令 $a = \sum_i a_i l^i$, 任取 $b = \sum_j b_j l^j \in K[l]$. 注意到

$$\begin{aligned}\left(\sum_i a_i l^i\right)\left(\sum_j j b_j l^{j-1}\right) &= \sum_{ij} j a_i b_j l^{i+j-1} \\ &= \sum_k \left(\sum_i (k-i) a_i b_{k-i} l^{k-1}\right) \\ &= \sum_k k\left(\sum_i a_i b_{k-i} l^{k-1}\right) - \sum_k \left(\sum_i i a_i b_{k-i} l^{k-1}\right)\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\left(\sum_i i a_i l^{i-1}\right)\left(\sum_j b_j l^j\right) &= \sum_{ij} i a_i b_j l^{i+j-1} \\ &= \sum_k \left(\sum_i i a_i b_{k-i} l^{k-1}\right),\end{aligned}$$

结合两个式子得到

$$\sum_k k\left(\sum_i a_i b_{k-i} l^{k-1}\right) = \left(\sum_i a_i l^i\right)\left(\sum_j j b_j l^{j-1}\right) + \left(\sum_i i a_i l^{i-1}\right)\left(\sum_j b_j l^j\right).$$

利用上式我们来计算

$$\begin{aligned}\delta(ab) &= \delta\left(\sum_k \left(\sum_{i=0}^k (a_i b_{k-i})\right) l^k\right) \\ &= \sum_k \left(\sum_{i=0}^k \delta(a_i b_{k-i})\right) l^k + \sum_k k\left(\sum_{i=0}^k (a_i b_{k-i})\right) l^{k-1} m \\ &= \sum_k \left(\sum_{i=0}^k (a_i \delta(b_{k-i}) + \delta(a_i) b_{k-i})\right) l^k \\ &\quad + \left(\sum_i a_i l^i\right)\left(\sum_j j b_j l^{j-1} m\right) + \left(\sum_i i a_i l^{i-1} m\right)\left(\sum_j b_j l^j\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_i a_i l^i\right)\left(\sum_j \delta(b_j) l^j\right) + \left(\sum_i \delta(a_i) l^i\right)\left(\sum_j b_j l^j\right) \\
&\quad + \left(\sum_i a_i l^i\right)\left(\sum_j j b_j l^{j-1} m\right) + \left(\sum_i i a_i l^{i-1} m\right)\left(\sum_j b_j l^j\right) \\
&= \left(\sum_i a_i l^i\right)\left(\sum_j \delta(b_j) l^j + \sum_j j b_j l^{j-1} m\right) \\
&\quad + \left(\sum_i \delta(a_i) l^i + \sum_i i a_i l^{i-1} m\right)\left(\sum_j b_j l^j\right) \\
&= a\delta(b) + \delta(a) b,
\end{aligned}
$$

这样就说明了对于超越元 $l \in L \backslash K$ 可以将 K_C-导子 δ 从 $K \to K$ 扩张到 $K[l] \to L$ 上, 同时可以在 L 中任意选一个 m 作为 $\delta(l)$. 从而最后扩张到 $K(l) \to L$ 上.

情形 II. l 是代数元.

首先这意味着 $K[l] = K(l)$. 假设 l 是 K 上的可分元. 令 $\mathrm{irr}(l, K) = p(x) = x^n + \sum_{j=0}^{m} k_j l^j$, 到 m 次项之前系数非零. 若导子 $\delta : K \to K$ 可以扩张成为一个 K_C-导子 $\delta : K[l] \to L$, 则

$$
\begin{aligned}
0 &= \delta(p(l)) \\
&= n l^{n-1} \delta(l) + \sum_j j k_j l^{j-1} \delta(l) + \sum_j \delta(k_j) l^j \\
&= \delta(l)\left(n l^{n-1} + \sum_j j k_j l^{j-1}\right) + \sum_j \delta(k_j) l^j \\
&= \delta(l)(p'(l)) + \sum_j \delta(k_j) l^j.
\end{aligned}
$$

由可分性, $p'(x)$ 不是零多项式, 且由化零多项式的最小性, $p'(l) \neq 0$. 所以

$$
\delta(l) = \frac{-\sum_{j=0}^{m} \delta(k_j) l^j}{p'(l)}. \tag{4}
$$

这里我们对域扩张的生成元 l 来说, 导子的作用只有一种, 所以至多存在一种 δ 的扩张, 使其成为一个 K_C-导子 $(K[l] \to L)$. 同时通过式 (4) , 导子的像必须落在 $K[l]$ 中. 我们接下来验证这样的扩张确实是存在的. 为了方便起见, 定义这样的记号来代表仅对多项式系数求导 $\hat{D} : K[x] \to K[x], q(x) = \sum_j a_j x^j \mapsto \sum_j \delta(a_j) x^j$. 我们可以把式 (4) 改写为

$$
\delta(l) = \frac{-\hat{D} p(l)}{p'(l)}. \tag{5}
$$

其实 $\hat{D} : K[x] \to K[x]$ 就是一个 K_C-导子, 相当于**情形 I.** 中取 $\delta(l) = 0$.

由于 $K[l] = K(l)$, 存在一个多项式 $s(x) \in K[x]$, 使得

$$
s(l) = \frac{-\hat{D} p(l)}{p'(l)}. \tag{6}
$$

我们继续定义一个映射 $\check{D} : K[x] \to K[x], q(x) \mapsto \hat{D}q(x) + s(x)q'(x)$. 这样的 $\check{D}$ 是 K_C-线性的, 同时对任意 $r(x) \in K[x]$

$$\begin{aligned}\check{D}(qr) &= \hat{D}(qr) + s(qr)' \\ &= q\hat{D}r + \hat{D}qr + s(qr' + q'r) \\ &= q(\hat{D}r + sr') + (\hat{D}q + sq')r \\ &= q\check{D}r + \check{D}qr.\end{aligned}$$

所以 $\check{D} : K[x] \to K[x]$ 是一个 K_C-导子.

取 $\mathrm{ev}_l : K[x] \to L, q(x) \mapsto q(l)$ 是一个赋值同态. 很自然地, $\mathrm{Ker}\ \mathrm{ev}_l = (p(x))$. 对于一个 $q(x) = p(x)r(x), r(x) \in K[x]$ 来说

$$\check{D}q = \check{D}(pt) = p\hat{D}r + \hat{D}pr + s(pr' + p'r).$$

所以

$$\check{D}q(l) = (\hat{D}p(l) + s(l)p'(l))r(l) = 0.$$

这说明 $\check{D}(p(x)) \subset (p(x))$. 这样 $\check{D}$ 诱导了一个 K_C-线性映射, $D : K[l] \to K[l], Dq(l) := \mathrm{ev}_l(\check{D}q(x))$. 最后对任意 $q(l), r(l) \in K[l]$

$$\begin{aligned}D(q(l)r(l)) &= \mathrm{ev}_l(\check{D}(q(x)r(x))) \\ &= \mathrm{ev}_l(q(x)\check{D}r(x) + \check{D}q(x)r(x)) \\ &= \mathrm{ev}_l(q)\mathrm{ev}_l(\check{D}r(x)) + \mathrm{ev}_l(\check{D}q(x))\mathrm{ev}_l(r(x)) \\ &= q(l)Dr(l) + Dq(l)r(l).\end{aligned}$$

这样就说明了 $D : K[l] \to K[l]$ 是一个 K_C-导子, 且恰好是 δ 的扩张.

所以当 $l \in L \backslash K$ 是一个 K 上的可分的代数元时, 导子 $\delta : K \to K$ 可以唯一地扩张到域 $K(l)$ 上. l 的导子作用由式 (4) 给出.

定理 4.2 当 $K \subset L$ 是一个特征 0 的域扩张, $\delta : K \to K$ 是一个导子.

(i) δ 可以扩张成 L 上的导子 $\delta_L : L \to L$.
(ii) 当 $l \in L \backslash K$ 是 K 上的超越元时, 可以任意选取 $m \in L$ 使得扩张 δ_L 满足 $\delta_L(l) = m$.
(iii) 当 $K \subset L$ 是代数扩张时, δ_L 是唯一的.
(iv) 当 $K \subset L$ 是代数扩张时, δ_L 与 $\mathrm{Aut}(L/K)$ 中的自同构可交换.

证明 (i) 当 $K \subset L$ 是单扩张时, 从前文的讨论可以得到结论, 注意到特征 0 时可分性满足. 接下来只需要使用 Zorn 引理验证.

(ii) 由**情形 I.** 可以给出.

(iii) 由**情形 II.** 可以给出.

(iv) 若 $\sigma \in \mathrm{Aut}(L/K)$, 则 $\sigma \circ \delta_L \circ \sigma^{-1}$ 也是 δ 的一个扩张. 由扩张的唯一性可以证明结论. □

5 有限项积分

本节中的域 K 都是指特征 0 的微分域. 我们在本节中给出 Liouville 定理的代数证明. 题为有限项积分, 指的是寻找有限项和的积分, 即不考虑分析中级数的积分. 所以可以通过选取适当的有限生成的域扩张来解决. 接下来我们来解决所谓寻找 “初等原函数” 的问题.

对于一个微分域 K, 若 $l \in K, k \in K^\times$ 满足 $\delta(l) = \delta(k)/k$, 则称 l 是 k 的**一个对数**, 或 k 是 l 的**一个指数**. 对于任意 $k \in K^\times$, 我们称 $\delta(k)/k$ 为 k 的**对数导数**.

值得注意的是, 如此定义的指对数是有多值问题的, 很容易看出若 $l_1, l_2 \in K$ 都是 k 的对数时, 则 $l_1 - l_2 \in K_C$; 若 $k_1, k_2 \in K^\times$ 都是 l 的指数, 则 $k_1/k_2 \in K_C$. 我们用记号 $l \in \log k$ 和 $k \in \exp l$ 分别表示 l 是 k 的一个对数和 k 是 l 的一个指数. 这里将 $\log k$ 和 $\exp l$ 视为集合.

回顾分析中的对数, 很自然地我们有

$$\frac{\delta\left(\prod_{j=1}^n k_j^{m_j}\right)}{\prod_{j=1}^n k_j^{m_j}} = \sum_{j=1}^n m_j \frac{\delta(k_j)}{k_j}, \quad m_j \in \mathbb{Z}_+, k_j \in K. \tag{7}$$

令 $K \subset K(l)$ 是一个非平凡的单微分域扩张. 若存在 $k \in K$ 使得 l 是 k 的一个对数 (指数) 则称 l 是 K 上的**对数元 (指数元)**. 进一步我们给出所谓 “初等” 函数的一个定义:

定义 5.1 若对一个微分域扩张 $K \subset L$ 来说, 存在有限个中间域 $\{K_j\}_{j=0}^n$, 即 $K = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_n = L$, 使得 $K_j \subset K_{j+1}$ 是一个加入 l 的非平凡单扩张, 其中 l 是 K 上的代数元, 或对数元, 或指数元. 我们称这样的微分域扩张 $K \subset L$ 是**初等**的. 称 l 在 K 上是**初等元**或初等的.

比如, 我们常说的初等函数就是 $K(x)$ 的一个初等微分域扩张 $K(x) \subset L$, 其中 $K = \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$ 且 L 里都是函数, 导子取分析中的导数即可.

接下来引入 Liouville 在文章 [Lio35] 中所证明的定理, 但我们使用之前建立的代数语言:

定理 5.2 (Liouville) 令 K 是特征 0 的微分域, 假设 $\alpha \in K$ 在 K 中无原元. 则下面两个命题等价:

(i) α 在 K 的一个初等的、无新常元的微分域扩张中有原元.

(ii) 存在整数 $m \geq 1$、一系列常元 $c_1, \ldots, c_m \in K_C$ 和不同的 $\beta_1, \ldots, \beta_m \in K^\times, \gamma \in K$ 使得

$$\alpha = \sum_{j=1}^m c_j \frac{\delta(\beta_j)}{\beta_j} + \delta(\gamma). \tag{8}$$

接下来的证明由 M. Rosenlicht 给出 [Ros72].

证明 (ii)⇒(i) 是显然的, 取扩域 $L = K(\xi_1, \ldots, \xi_m), \xi_j \in \log \beta_j$ 即可.

(i)⇒(ii) 假设存在一个扩张链 $K=K_0\subset K_1\subset\cdots\subset K_n$. 其中每一次扩张都是一个单扩张且添加的元素只能是代数元、对数元或指数元. 同时存在 $\rho\in K_n$ 使得 $\delta(\rho)=\alpha$.

我们对 n 进行归纳. 当 $n=0$ 时, 取 $m=1, c_1=0, \gamma=\rho$ 即可. 现在假设 $n-1$ 时命题成立. 此时 α 也是 K_1 中的, 这样 $K_1\subset K_n$ 对应长度为 $n-1$ 的一个扩张链, 就可以使用归纳假设, 存在存在整数 $m\geq 1$、一系列常元 $c_1,\ldots,c_m\in K_{1,C}$ 和 $\beta_1,\ldots,\beta_m\in K_1^{\times}, \gamma\in K_1$ 使得有式 (8) 成立. 假设 $K_1=K(l)$, 我们只需证明这些 m,β_j,γ 可以调整到 K 上即可. 我们分三类情况讨论:

情形 I. l 是 K 上的代数元.

此时 $K(l)=K[l]$. 考虑 K 的一个含有 l 的代数闭包 K^a, 以及所有域扩张 $K\subset K[l]$ 到 $K\subset K^a$ 的嵌入 $\sigma_i, i=1,\ldots,s$. 假设 σ_1 是包含映射, 即 $\sigma_1(l)=l$. 记 $p(x)=\mathrm{irr}(l,K)$, $p(x)$ 在 K^a 中分裂为 $\prod_{i=1}^{s}(x-l_i)$. 对于任意 $q(l)\in K[l]$, 有 $\sigma_i(q(l))=q(l_i)$. 定义这一组嵌入之后, 我们由定理 4.2 (iv) 知道: $\sigma_i\circ\delta(q(l))=\delta(q(l_i))$.

假设 $q_1,\ldots,q_m,r\in K[x]$ 使得 $\beta_j=q_j(l), \gamma=r(l)$, 这样有

$$\alpha=\sum_j c_j\frac{\delta(q_j(l))}{q_j(l)}+\delta(r(l)). \tag{9}$$

作用上 σ_i,

$$\alpha=\sum_j c_j\frac{\delta(q_j(l_i))}{q_j(l_i)}+\delta(r(l_i)),$$

对指标 i 求和并除掉 s(特征 0), 并使用式 (7) 得到

$$\alpha=\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{s}\frac{\delta\left(\prod_{i=1}^{s}q_j(l_i)\right)}{\prod_{i=1}^{s}q_j(l_i)}+\delta\left(\frac{\sum_{i=1}^{s}r(l_i)}{s}\right).$$

上式的右侧的 $n+1$ 项在 σ_i 的作用下是不变的. 由于特征 0 情况下, $K\subset K(l)$ 是可分扩张, 即不会出现 $\sigma_i=\sigma_j, i\neq j$, 这样说明了:

$$\frac{\delta\left(\prod_{i=1}^{s}q_j(l_i)\right)}{\prod_{i=1}^{s}q_j(l_i)}\in K,\quad j=1,\ldots,n\quad \delta\left(\frac{\sum_{i=1}^{s}r(l_i)}{s}\right)\in K$$

这样我们就找到了需要的 α 的表达式.

现在我们考虑 l 是 K 上的超越元. 同样地, 由于是单扩张, 我们可以令 $\beta_j=q_j(l), \gamma=r(l)$, 并将 α 写成式 (9) 的形式. 只不过此时 $q_j(x), r(x)\in K(x)$. 不过对于每个 $q_j(x)$ 我们将其写成不可约首一多项式的整数幂次乘积 $k_j\prod_{i=1}^{n_j}(q_{ji}(x))^{n_{ji}}$, 其中 $k_j\in K, q_{ji}\in K[l], n_j\in\mathbb{Z}_+, n_{ji}\in\mathbb{Z}$. 由式 (7) 不妨假设式 (9)中的 $q_j(l)$ 或者是 $K[l]$ 中次数大于 1 的首一不可约多项式, 或者是 K 中元素. 这是因为很容易可以将一个关于 l 的有理分式 $q_j(l)$ 的对数导数进行如下拆解:

$$\frac{\delta(q_j(l))}{q_j(l)}=\sum_{j=1}^{n_j}n_{ji}\frac{\delta(q_{ji}(l))}{q_{ji}(l)}+\frac{\delta(k_j)}{k_j}.$$

将 β_j 重新调整即可.

情形 II. l 是 K 上的一个对数元. 此时存在 $k \in K$ 使得 $\delta(l) = \delta(k)/k$.

令 $p(l) \in K[l]$ 是一个次数大于 1 的首一不可约多项式. 容易发现 $\delta(p(l)) \in K[l]$ 次数是严格小于 $p(l)$ 的. 所以 $p(l)$ 无法整除 $\delta(p(l))$. 所以我们对于式 (9) 的项 $\sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\delta(q_j(l))}{q_j(l)}$ 来说, 每个分母是不会是 $q_j(l)$ 超过 1 的幂次.

我们利用 $K(l)$ 中的部分分式分解来继续证明. 考虑 $r(l)$ 的部分分式分解, 其中会有 $f(l)/(p(l))^m$ 这样的形式出现. $f(l)$ 的次数需要小于 $p(l)$. 假设 d 是 $p(l)$ 出现的最高次幂. 则在 $\delta(r(l))$ 的部分分式分解里出现 $p(l)$ 的相关的项是 $\delta(f(l)/(p(l))^d)$, 即 $-d \cdot f(l)\delta(p(l))/(p(l))^{d+1}$ 加上至多 d 项分母更低次的项. 更进一步地, 式 (9) 中 $\delta(r(l))$ 之外的部分, 分母是不可约多项式地一次幂且分子次数小于分母, 无法消去分母 $p(l)$ 幂次高于 1 的项, 特别地, 无法消去 $-d \cdot f(l)\delta(p(l))/(p(l))^{d+1}$.

现在我们有如下结论: 若在式 (9) 中有一个 $q_j(l)$ 就是上述不可约的多项式 $p(l)$, 或此时 $p(l)$ 出现在 $r(l)$ 的部分分式分解中, 则 $p(l)$ 会出现在 α 的部分分式分解里. 这里如果出现 $\delta(q_j(l))/q_j(l)$ 和 $\delta(r(l))$ 中的某一项消去的情况, 我们完全可以重新选择 $q_j(l)$ 使得每个 $q_j(l)$ 不会出现上述相消的情况. 所以由部分分式分解的唯一性, α 的部分分式分解只能是 α, 可以得到 $q_j = q_j(l) \in K$ 且 $r(l)$ 是一个多项式. 同时 $\delta(r(l)) \in K$.

所以利用命题 3.2 (i) 以及无新常元性质, $r(l)$ 只能是 $cl + \hat{c}$, 其中 $c \in K_C, \hat{c} \in K$. 式 (9) 改写为

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\delta(q_j)}{q_j} + c\frac{\delta(k)}{k} + \delta(\hat{c}).$$

这正是我们想要的形式.

情形 III. l 是 K 上的一个指数元. 此时存在 $k \in K$ 使得 $\delta(l)/l = \delta(k)$.

我们同样假设 $p(l)$ 是一个次数大于 1 的首一不可约多项式. 从命题 3.5 可以得到 $p(l) \neq l$ 时 $\delta(p(l)) \in K[l]$ 且 $p(l)$ 不整除 $\delta(p(l))$. 先假设 $q_j(l) \neq l$, 接着和**情形 II.** 中一样, 可以证明 $q_j = q_j(l) \in K$. 我们将 $r(l)$ 写成 $r(l) = \sum_{-t}^{t} k_j l^j$, 其中 $t \in \mathbb{Z}_+, k_j \in K$.

因为 $\delta(q_j(l))/q(l) \in K$, 所以 $\delta(r(l)) \in K$. 再次使用命题 3.5 可以得到 $r = r(l) \in K$. 由于 q_j 是有可能出现 l 的, 不妨假设就是 q_1, 那么

$$\alpha = c_1\frac{\delta(k)}{k} + \sum_{j=2}^{n} c_j \frac{\delta(q_j)}{q_j} + \delta(r) = \sum_{j=2}^{n} c_j \frac{\delta(q_j)}{q_j} + \delta(c_1 k + r).$$

这就得到了需要的表达式. □

我们接下来给出这个重要定理的一些应用.

推论 5.3 (Liouville) 假设 E 是一个特征 0 的域, 给定一个 $g \in E$, 取 $h \in \exp g$. 令 $E \subset K = E(h)$ 是一个无新常元的微分域扩张. 这样 h 在 E 上是超越的. 对于任意 $f \in E$, $fh \in K$ 在一个 K 的无新常元的初等微分域扩张中有原元当且仅当存在 $a \in E$ 使得

$$f = \delta(a) + a\delta(g)$$

或者等价地

$$fh = \delta(ah).$$

证明 必要性: 利用 Liouville 给出的定理, fl 有一个原元当且仅当存在 $c_j \in K_C = E_C, \beta_j \in K^\times, j = 1, \ldots, n, \gamma \in K$ 使得

$$fh = \sum_{j=1}^{n} c_j \frac{\delta(\beta_j)}{\beta_j} + \delta(\gamma). \tag{10}$$

接下来记 $\gamma = r(h), \beta_j = q_j(h) \in K(h) = K = E(h)$. 在 Liouville 定理证明中超越扩张的情况里可以知道, $q_j(h)$ 可以用过适当的选取, 使其或者是 $E[h]$ 中的首一不可约多项式, 或者是 E 中元素. 同时在**情形 III.** 的讨论中将 K 换为 E, 可以看出, h 只能出现在 $r(h)$ 的部分分式分解的分母中, 或者是某一个 $q_j(h) \in E[h]\backslash E$. 这样会得到 $\delta(g_j(h))/(g_j(h)) \in E$ 且 $r(h) - \sum_{j=-t}^{t} k_j h^j, t \in \mathbb{Z}_+, k_j \in E$. 这样式 (10) 改写为

$$fh = c + \sum_{j=-t}^{t} \delta(k_j) h^j + \delta(g) \sum_{j=-t}^{t} j k_j h^j, \quad c \in E,$$

对比等式左右 h 的幂次可以得到 $fh = \delta(k_1) + k_1 \delta(g)$. 只需取 $a = k_1$ 即可.

充分性是显然的. □

我们接下来把这个定理用在微积分中.

推论 5.4 对于 $K = \mathbb{R}$ 或者 $\mathbb{C}$ 来说, $x \mapsto \exp(x^2)$ 是没有初等原函数的.

证明 考虑域扩张 $K(x) \subset K(x, \exp(x^2))$. 由 $\exp(x^2)$ 的超越性以及 Liouville 定理的推论, 我们需要找到一个 $a \in K(x)$ 使得 $1 = a' + 2ax$. 假设 $a = p/q$, 其中 p, q 是互素的 K 系数多项式. 则 $1 = \frac{qp' - q'p}{q^2} + 2 \cdot \frac{px}{q}$. 进一步得到 $q^2 = qp' - q'p + 2xpq$. 这样的话 $q|q'$, 也即 $q' = 0$. q 此时是一个常数, 不妨设 $a = p$, 则对比 $1 = a' + 2ax$ 两边 x 的次数会发现矛盾. 所以 $\exp(x^2)$ 没有初等的原函数. □

值得注意的是: 无新增常元条件是很重要的. 可以尝试构造域扩张 $\mathbb{R}(x) \subset \mathbb{R}(x, \arctan x)$ 是一个有新增常元的扩张, 此时会发现 $\frac{1}{1+x^2}$ 无法写成 Liouville 定理中相应的表达形式.

6 总结

按照分析中常用的说法, 基本初等函数有: 常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数. 而借助复数, 我们可以用常值函数、幂函数、指对数函数来生成所有的初等函数. 所以初等函数也是可以通过上面讨论的办法, 来判断其原函数的存在性.

参考文献

[Chu03] Richard C. Churchill. "Liouville's Theorem on Integration in Terms of Elementary Functions". In: 2003.

[Lio35] Joseph Liouville. "Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes." fre. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik 13 (1835), pp. 93–118.

[Ros72] Maxwell Rosenlicht. "Integration in Finite Terms". In: American Mathematical Monthly 79 (1972), pp. 963–972.